# I. Cinématique

	Vecteur vitesse	-0			
Formule de la dérivation vectorielle		Si $M \in \text{materiellement à }(S): V(M/R_0) - V(M \in S/R_0)$			
$ \begin{array}{c} \textbf{Champ des vecteurs} \\ \textbf{vitesses} \\ \hline \textbf{V}(B \in S/R) = \overrightarrow{V}(A \in S/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S/R) \\ \hline \textbf{Torseur cinématique des liaisons normalisées} \\ \hline \{ \vartheta(S_2/S_1) \} = \begin{cases} \overrightarrow{\Omega}(S_2/S_1) \\ \overrightarrow{V}(A \in S_2/S_1) \end{cases}_A = \begin{cases} w_x \overrightarrow{x} + w_y . \overrightarrow{y} + w_z . \overrightarrow{z} \\ v_x \overrightarrow{x} + v_y . \overrightarrow{y} + v_z . \overrightarrow{z} \end{cases}_A = \begin{cases} w_x & v_x \\ w_y & v_y \\ w_z & v_z \end{cases}_{(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})} \\ \hline \textbf{Composition des vecteurs vitesses} \\ \hline \textbf{V}(M/R_0) = \overrightarrow{V}(M/R_1) + \overrightarrow{V}(M \in R_1/R_0) \\ \hline \textbf{V}(M/R_0) : \text{Vitesse absolue} : \overrightarrow{V}(M/R_1) : \text{Vitesse relative} \\ \hline \overrightarrow{V}(M \in R_1/R_0) : \text{Vitesse d'entraînement} \\ \hline \textbf{Composition des vecteurs rotation} \\ \hline \textbf{Compositions des vecteurs accélérations} \\ \hline \overrightarrow{\Gamma}(M/R_0) = \overrightarrow{\Gamma}(M/R_1) + \overrightarrow{\Gamma}(M \in R_1/R_0) + 2 \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{V}(M/R_1) \\ \hline \overrightarrow{\Gamma}(M/R_0) : \text{Accélération absolue} : \overrightarrow{\Gamma}(M/R_1) : \text{Accélération relative} \\ \hline \overrightarrow{\Gamma}(M \in R_1/R_0) : \text{Accélération d'entraînement} \\ \hline \textbf{2} \overrightarrow{\Omega}(S_2/S_1) : \text{Accélération de Coriolis} \\ \hline \textbf{Vecteur vitesse de rotation de roulement et de pivotement} \\ \hline \overrightarrow{\Omega}(S_2/S_1) : \text{vecteur vitesse de rotation de pivotement} \\ \hline \overrightarrow{\Omega}_1(S_2/S_1) : \text{vecteur vitesse de rotation de pivotement} \\ \hline \overrightarrow{\Omega}_1(S_2/S_1) : \text{vecteur vitesse de rotation de roulement} \\ \hline \textbf{Roulement sans glissement} \\ \hline \textbf{Fermeture géométrique} \\ (chaînes fermées) \\ \hline \textbf{Fermeture géométrique} \\ (chaînes fermées) \\ \hline \textbf{Composition des vecteurs vitesses de rotation de roulement} \\ \hline \textbf{Liaisons en parallèles} \\ \theta_{eq}(S_2/S_1) \} = \theta_{Liaisons} \textbf{en parallèles} \\ \theta_{eq}(S_2/S_1) \} = \theta_{Liaisons} \textbf{en parallèles} \\ \theta_{eq}(S_2/S_1) \} = \theta_{Liaisons} \textbf{en mobilité} \\ \hline \textbf{m} = N_S = \overrightarrow{\Sigma}_{n} , \dots , m = n, \dots, m = n, \dots, m = m, m =$	Vecteur accélération	$\overrightarrow{\Gamma(M/R_0)} = \left(\frac{d \ \overrightarrow{V(M/R_0)}}{dt}\right)_{R_0}$			
$ \begin{array}{c} \textbf{Champ des vecteurs} \\ \textbf{vitesses} \\ \hline \textbf{V}(B \in S/R) = \overrightarrow{V}(A \in S/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S/R) \\ \hline \textbf{Torseur cinématique des liaisons normalisées} \\ \hline \{ \vartheta(S_2/S_1) \} = \begin{cases} \overrightarrow{\Omega}(S_2/S_1) \\ \overrightarrow{V}(A \in S_2/S_1) \end{cases}_A = \begin{cases} w_x \overrightarrow{x} + w_y . \overrightarrow{y} + w_z . \overrightarrow{z} \\ v_x \overrightarrow{x} + v_y . \overrightarrow{y} + v_z . \overrightarrow{z} \end{cases}_A = \begin{cases} w_x & v_x \\ w_y & v_y \\ w_z & v_z \end{cases}_{(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})} \\ \hline \textbf{Composition des vecteurs vitesses} \\ \hline \textbf{V}(M/R_0) = \overrightarrow{V}(M/R_1) + \overrightarrow{V}(M \in R_1/R_0) \\ \hline \textbf{V}(M/R_0) : \text{Vitesse absolue} : \overrightarrow{V}(M/R_1) : \text{Vitesse relative} \\ \hline \overrightarrow{V}(M \in R_1/R_0) : \text{Vitesse d'entraînement} \\ \hline \textbf{Composition des vecteurs rotation} \\ \hline \textbf{Compositions des vecteurs accélérations} \\ \hline \overrightarrow{\Gamma}(M/R_0) = \overrightarrow{\Gamma}(M/R_1) + \overrightarrow{\Gamma}(M \in R_1/R_0) + 2 \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{V}(M/R_1) \\ \hline \overrightarrow{\Gamma}(M/R_0) : \text{Accélération absolue} : \overrightarrow{\Gamma}(M/R_1) : \text{Accélération relative} \\ \hline \overrightarrow{\Gamma}(M \in R_1/R_0) : \text{Accélération d'entraînement} \\ \hline \textbf{2} \overrightarrow{\Omega}(S_2/S_1) : \text{Accélération de Coriolis} \\ \hline \textbf{Vecteur vitesse de rotation de roulement et de pivotement} \\ \hline \overrightarrow{\Omega}(S_2/S_1) : \text{vecteur vitesse de rotation de pivotement} \\ \hline \overrightarrow{\Omega}_1(S_2/S_1) : \text{vecteur vitesse de rotation de pivotement} \\ \hline \overrightarrow{\Omega}_1(S_2/S_1) : \text{vecteur vitesse de rotation de roulement} \\ \hline \textbf{Roulement sans glissement} \\ \hline \textbf{Fermeture géométrique} \\ (chaînes fermées) \\ \hline \textbf{Fermeture géométrique} \\ (chaînes fermées) \\ \hline \textbf{Composition des vecteurs vitesses de rotation de roulement} \\ \hline \textbf{Liaisons en parallèles} \\ \theta_{eq}(S_2/S_1) \} = \theta_{Liaisons} \textbf{en parallèles} \\ \theta_{eq}(S_2/S_1) \} = \theta_{Liaisons} \textbf{en parallèles} \\ \theta_{eq}(S_2/S_1) \} = \theta_{Liaisons} \textbf{en mobilité} \\ \hline \textbf{m} = N_S = \overrightarrow{\Sigma}_{n} , \dots , m = n, \dots, m = n, \dots, m = m, m =$		$\left(\frac{d\overrightarrow{U}(t)}{dt}\right)_{R} = \left(\frac{d\overrightarrow{U}(t)}{dt}\right)_{R_{i}} + \overrightarrow{\Omega}(R_{i}/R) \wedge \overrightarrow{U}(t)$			
Composition des vecteurs vitesses		$\vec{V}(B \in S/R) = \vec{V}(A \in S/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(S/R)$			
Composition des vecteurs vitesses $ \vec{V}(M/R_0) : \text{Vitesse absolue} : \vec{V}(M/R_1) : \text{Vitesse relative} $ $ \vec{V}(M \in R_1/R_0) : \text{Vitesse d'entraînement} $ $ \vec{V}(M \in R_1/R_0) : \text{Vitesse d'entraînement} $ $ \vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) $ $ \vec{\Gamma}(M/R_0) = \vec{\Gamma}(M/R_1) + \vec{\Gamma}(M \in R_1/R_0) + 2.\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1) $ $ \vec{\Gamma}(M/R_0) : \text{Accélération absolue} : \vec{\Gamma}(M/R_1) : \text{Accélération relative} $ $ \vec{\Gamma}(M \in R_1/R_0) : \text{Accélération d'entraînement} $ $ 2.\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1) : \text{Accélération de Coriolis} $ $ \vec{\Omega}(S_2/S_1) : \text{Accélération de roulement} $ $ \vec{\Omega}(S_2/S_1) : \text{vecteur vitesse de rotation de pivotement} $ $ \vec{\Omega}_r(S_2/S_1) : \text{vecteur vitesse de rotation de pivotement} $ $ \vec{\Omega}_r(S_2/S_1) : \text{vecteur vitesse de rotation de pivotement} $ $ \vec{\Omega}_r(S_2/S_1) : \text{vecteur vitesse de rotation de roulement} $ $ \vec{\Omega}_r(S_2/S_1) : \text{vecteur vitesse de rotation de roulement} $ $ \vec{\Omega}_r(S_2/S_1) : \text{vecteur vitesse de rotation de roulement} $ $ \vec{\Omega}_r(S_2/S_1) : \text{vecteur vitesse de rotation de roulement} $ $ \vec{\Omega}_r(S_2/S_1) : \text{vecteur vitesse de rotation de roulement} $ $ \vec{\Omega}_r(S_2/S_1) : \text{vecteur vitesse de rotation de roulement} $ $ \vec{\Omega}_r(S_2/S_1) : \text{vecteur vitesse de rotation de roulement} $ $ \vec{\Omega}_r(S_2/S_1) : \text{vecteur vitesse de rotation de roulement} $ $ \vec{\Omega}_r(S_2/S_1) : \text{vecteur vitesse de rotation de roulement} $ $ \vec{\Omega}_r(S_2/S_1) : \text{vecteur vitesse de rotation de roulement} $ $ \vec{\Omega}_r(S_2/S_1) : \text{vecteur vitesse de rotation de roulement} $ $ \vec{\Omega}_r(S_2/S_1) : \text{vecteur vitesse de rotation de roulement} $ $ \vec{\Omega}_r(S_2/S_1) : \vec{\Omega}_r(S_2/S_1) = \vec{\Omega}_r(S_2/S_1) $	_	$ \left\{ \mathcal{G}(S_2/S_1) \right\} = \left\{ \vec{\Omega}(S_2/S_1) \atop \vec{V}(A \in S_2/S_1) \right\}_A = \left\{ w_x.\vec{x} + w_y.\vec{y} + w_z.\vec{z} \atop v_x.\vec{x} + v_y.\vec{y} + v_z.\vec{z} \right\}_A = \left\{ w_x  v_x \atop w_y  v_y \atop w_z  v_z \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} $			
$ \vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) $ $ \vec{\Gamma}(M/R_0) = \vec{\Gamma}(M/R_1) + \vec{\Gamma}(M \in R_1/R_0) + 2.\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1) $ $ \vec{\Gamma}(M/R_0) = \vec{\Gamma}(M/R_1) + \vec{\Gamma}(M \in R_1/R_0) + 2.\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1) $ $ \vec{\Gamma}(M/R_0) = \vec{\Gamma}(M/R_1) + \vec{\Gamma}(M \in R_1/R_0) + 2.\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1) $ $ \vec{\Gamma}(M/R_0) = \vec{\Gamma}(M/R_0) + 3.\text{Accélération absolue} ; \vec{\Gamma}(M/R_1) + 3.\text{Accélération relative} $ $ \vec{\Gamma}(M \in R_1/R_0) + 3.\text{Accélération de Coriolis} $ $ \vec{\Omega}(S_2/S_1) = \vec{\Omega}_n(S_2/S_1) + \vec{\Omega}_t(S_2/S_1) $ $ \vec{\Omega}_n(S_2/S_1) + \vec{\Omega}_t(S_2/S_1) + \vec{\Omega}_t(S_2/S_1) $ vecteur vitesse de rotation de Pivotement $ \vec{\Omega}_t(S_2/S_1) + 3.\vec{\Omega}_t(S_2/S_1) + 3.\vec{\Omega}_t(S_2/S_1) $ vecteur vitesse de rotation de pivotement $ \vec{\Omega}_t(S_2/S_1) + 3.\vec{\Omega}_t(S_2/S_1) + 3.\vec{\Omega}_t(S_2/S_1) + 3.\vec{\Omega}_t(S_2/S_1) $ vecteur vitesse de rotation de roulement $ \vec{\Omega}_t(S_2/S_1) + 3.\vec{\Omega}_t(S_2/S_1) + 3.\vec$	-	$\vec{V}(M/R_0)$ : Vitesse absolue; $\vec{V}(M/R_1)$ : Vitesse relative			
$ \begin{array}{c c} \mathbf{\hat{\Omega}}(S/R_0) = \mathbf{\hat{\Omega}}(S/R_1) + \mathbf{\hat{\Omega}}(R_1/R_0) \\ \hline & \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_0) = \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M \in R_1/R_0) + 2.\mathbf{\hat{\Omega}}(R_1/R_0) \wedge \mathbf{\hat{V}}(M/R_1) \\ \hline & \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_0) = \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M \in R_1/R_0) + 2.\mathbf{\hat{\Omega}}(R_1/R_0) \wedge \mathbf{\hat{V}}(M/R_1) \\ \hline & \mathbf{\hat{\Gamma}}(M \in R_1/R_0) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M \in R_1/R_0) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) \\ \hline & \mathbf{\hat{\Gamma}}(M \in R_1/R_0) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) \\ \hline & \mathbf{\hat{\Gamma}}(M \in R_1/R_0) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) \\ \hline & \mathbf{\hat{\Gamma}}(M \in R_1/R_0) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) \\ \hline & \mathbf{\hat{\Gamma}}(M \in R_1/R_0) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) \\ \hline & \mathbf{\hat{\Gamma}}(M \in R_1/R_0) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) \\ \hline & \mathbf{\hat{\Gamma}}(M \in R_1/R_0) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) \\ \hline & \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) + \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) \\ \hline & \mathbf{\hat{\Gamma}}(M/R_1) + \mathbf$	Composition des				
Compositions des vecteurs accélérations $\vec{\Gamma}(M/R_0): \text{Accélération absolue} \; ; \; \vec{\Gamma}(M/R_1): \text{Accélération relative} \\ \vec{\Gamma}(M \in R_1/R_0): \text{Accélération d'entraînement} \\ 2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1): \text{Accélération de Coriolis} \\ \vec{\Omega}(S_2/S_1) = \vec{\Omega}_n(S_2/S_1) + \vec{\Omega}_t(S_2/S_1) \\ \vec{\Omega}_n(S_2/S_1): \text{vecteur vitesse de rotation de pivotement} \\ \vec{\Omega}_t(S_2/S_1): \text{vecteur vitesse de rotation de roulement} \\ \vec{Roulement sans} \\ \vec{glissement} \qquad I: \text{point de contact entre S2 et S1} \Rightarrow \vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{0} \\ \vec{Fermeture géométrique} \\ (chaines fermées) \qquad Somme vectorielle nulle: La loi entrée sortie géométrique est déterminée par la projection sur les vecteurs unitaire d'une base unique.} \\ \vec{Fermeture cinématique} \\ (chaines fermées) \qquad La loi entrée sortie cinématique est déterminée par la composition des vecteurs vitesses, ou bien par dérivation de la loi entrée sortie géométrique.} \\ \vec{S}_{eq}(S_2/S_1) = \{\hat{\vartheta}_{Li}(S_2/S_1)\}; \ \forall i \qquad \qquad \{\hat{\vartheta}_{eq}(S_n/S_0)\} = \sum_{i=1}^n \{\hat{\vartheta}(S_i/S_{i-1})\} \\ \vec{S}_{eq}(S_n/S_0) = \sum_{i=1}^n \{\hat{\vartheta}(S_i/S_{i-1})\}$ $\vec{S}_{eq}(S_n/S_0) = \sum_{i=1}^n \{\hat{\vartheta}(S_i/S_{i-1})\}$ $\vec{S}_{eq}(S_n/S_0) = \sum_{i=1}^n \{\hat{\vartheta}(S_i/S_{i-1})\}$	-				
Vecteur vitesse de rotation de roulement et de pivotement	_	$\vec{\Gamma}(M/R_0)$ : Accélération absolue ; $\vec{\Gamma}(M/R_1)$ : Accélération relative $\vec{\Gamma}(M \in R_1/R_0)$ : Accélération d'entraînement			
	Voctovy viterro do				
Roulement sans glissement       I: point de contact entre S2 et S1 $\Rightarrow$ $\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{0}$ Fermeture géométrique (chaines fermées)       Somme vectorielle nulle : La loi entrée sortie géométrique est déterminée par la projection sur les vecteurs unitaire d'une base unique.         Fermeture cinématique (chaines fermées)       La loi entrée sortie cinématique est déterminée par la composition des vecteurs vitesses, ou bien par dérivation de la loi entrée sortie géométrique.         Liaisons en parallèles       Liaisons en série $\{9_{eq}(S_2/S_1)\} = \{9_{Li}(S_2/S_1)\}$ ; $\forall i$ degré de mobilité : m = degré de mobilité $m = N_C - \sum_{i=1}^{n} n_i$ $m = n_C$ $m = n_C$ $m = n_C$	rotation de roulement et				
Fermeture géométrique (chaines fermées)  Fermeture cinématique (chaines fermées)  Liaisons en parallèles $ \begin{cases} 9_{eq}(S2/S1) \\ eq \end{cases} = \begin{cases} 9_{Li}(S2/S1) \\ eq \end{cases}; \forall i $ Gegré de mobilité: $\mathbf{m} = \text{degré}$ de mobilité $ \mathbf{m} = N_C = \sum_{n=1}^{n} \mathbf{n} \mathbf{n} \mathbf{n} \mathbf{n} \mathbf{n} \mathbf{n} \mathbf{n} \mathbf$	Roulement sans				
(chaines fermées)la projection sur les vecteurs unitaire d'une base unique.Fermeture cinématique (chaines fermées)La loi entrée sortie cinématique est déterminée par la composition des vecteurs vitesses, ou bien par dérivation de la loi entrée sortie géométrique.Liaisons en parallèlesLiaisons en série $\left\{9_{eq}(S_2/S_1)\right\} = \left\{9_{Li}(S_2/S_1)\right\}$ ; $\forall i$ $\left\{9_{eq}(S_n/S_0)\right\} = \sum_{i=1}^n \left\{9(S_i/S_{i-1})\right\}$ degré de mobilité : $\mathbf{m} = \deg$ ré de mobilité $\mathbf{m} = N_C = \sum_{i=1}^n \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{n}$ $\mathbf{m} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{m}$	glissement				
Fermeture cinématique (chaines fermées)       La loi entrée sortie cinématique est déterminée par la composition des vecteurs vitesses, ou bien par dérivation de la loi entrée sortie géométrique.         Liaisons en parallèles       Liaisons en série $\left\{9_{eq}(S_2/S_1)\right\} = \left\{9_{Li}(S_2/S_1)\right\}$ ; $\forall i$ $\left\{9_{eq}(S_n/S_0)\right\} = \sum_{i=1}^n \left\{9(S_i/S_{i-1})\right\}$ degré de mobilité : $\mathbf{m} = \text{degré}$ de mobilité $\mathbf{m} = N_C = \sum_{i=1}^n n_i$	_	· ·			
(chaines fermées)       vecteurs vitesses, ou bien par dérivation de la loi entrée sortie géométrique.         Liaisons en parallèles       Liaisons en série $\left\{ 9_{eq}(S_2/S_1) \right\} = \left\{ 9_{Li}(S_2/S_1) \right\}$ ; $\forall i$ $\left\{ 9_{eq}(S_n/S_0) \right\} = \sum_{i=1}^n \left\{ 9(S_i/S_{i-1}) \right\}$ degré de mobilité : $\mathbf{m} = \text{degré}$ de mobilité $\mathbf{m} = N_C = \sum_{i=1}^n n_i$ $\mathbf{m} = \mathbf{n}$ $\mathbf{m} = \mathbf{m}$	•				
	_	* * *			
$\left\{ 9_{eq}(S_2/S_1) \right\} = \left\{ 9_{Li}(S_2/S_1) \right\} ; \forall i$ $\left\{ 9_{eq}(S_n/S_0) \right\} = \sum_{i=1}^n \left\{ 9(S_i/S_{i-1}) \right\}$ $\mathbf{degr\acute{e} de mobilit\acute{e} : m = degr\acute{e} de mobilit\acute{e}}$ $\mathbf{m} = N_C = \sum_{i=1}^n n_i \cdot \mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}$	Liaisons en para	Lioigang an gária			
$\mathbf{m} = \mathbf{N} \mathbf{c} = \mathbf{y} \mathbf{n} + \mathbf{m} = \mathbf{n}$	_	$\langle \qquad \rangle \qquad n$			
		gré de mobilité $\mathbf{m} = \mathrm{Nc} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{n}_{ci}$ ; $\mathbf{m}_{u} = \mathbf{n}_{c\acute{e}q}$ ; $\mathbf{m}_{i} = \mathbf{m} - \mathbf{m}_{u}$			

#### Cinématique graphique (Exigée seulement en CNC)

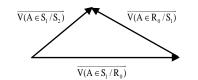
# $\overrightarrow{V}(B \in S / R_0).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V}(A \in S / R_0).\overrightarrow{AB} \implies AH = BK$

Utilisation : si on a une vitesse d'un point et la direction d'un autre point, on peut déduire la norme et le sens de la vitesse du deuxième point.

# $V(A \in S/R_0)$ $V(B \in S/R_0)$

### **Composition des vecteurs vitesses**

 $\vec{V}(A \in S_1/S_2) = \vec{V}(A \in S_1/R_0) + \vec{V}(A \in R_0/S_2)$ : Si on a une vitesse et les directions des deux autres vitesses  $\longrightarrow$  La fermeture vectorielle permet de déterminer le sens et la norme des deux vitesses.



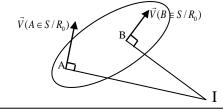
#### Centre instantané de rotation :CIR

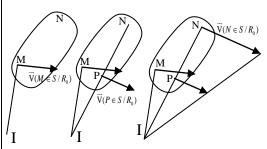
La vitesse du CIR est nulle à l'instant considéré :  $\vec{V}(I \in S / R_0) = \vec{0}$ 

- 1- Détermination du CIR :  $I = \left[ \perp \vec{V} (A \in S / R_0) \right] \cap \left[ \perp \vec{V} (B \in S / R_0) \right]$
- 2- Connaissant le CIR et  $\vec{V}(M \in S/R_0)$ , on peut déterminer le vecteur vitesse de n'importe quel autre point N de (S)/ $R_0$ .

$$\vec{V}(I \in S / R_0) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\left\| \vec{V}(M \in S / R) \right\|}{\left\| \vec{V}(N \in S / R) \right\|} = \frac{\left\| \vec{MI} \right\|}{\left\| \vec{NI} \right\|}$$

- Soit le point P, tq  $P \in (IN)$  et  $\|\overrightarrow{IM}\| = \|\overrightarrow{IP}\|$
- $\Rightarrow \| \overrightarrow{\mathbf{V}}(p \in S / R_0) \| = \| \overrightarrow{\mathbf{V}}(M \in S / R_0) \|$
- N, P et I sont alignés : Fermeture triangulaire





# II. Statique

Torseur des actions mécaniques dans le cas du contact surfacique	$\left\{\mathcal{T}(S_1 \to S_2)\right\} = \begin{cases} \int\limits_{M \in S} \vec{\mathbf{f}}_{\mathrm{M}}(S_1 \to S_2).ds \\ \int\limits_{M \in S} \overline{AM} \wedge \vec{\mathbf{f}}_{\mathrm{M}}(S_1 \to S_2).ds \end{cases}; \begin{cases} \vec{\mathbf{f}}_{\mathrm{M}}(S_1 \to S_2) = \vec{\mathbf{f}}_{\mathrm{n}}(S_1 \to S_2) + \vec{\mathbf{f}}_{\mathrm{t}}(S_1 \to S_2) \\ \Rightarrow \vec{\mathbf{f}}_{\mathrm{M}}(S_1 \to S_2) = -p(M) \left[ \vec{n}(M) + f.\vec{t}(M) \right] \end{cases}$			
Lois de coulomb	$\vec{V}(M \in S_2 / S_1) \neq \vec{0} \implies \begin{cases} \vec{f}_t(S_1 \to S_2) \land \vec{V}(M \in S_2 / S_1) = \vec{0} \\ \vec{f}_t(S_1 \to S_2) \cdot \vec{V}(M \in S_2 / S_1) < 0 \end{cases} \text{ et } \ \vec{f}_t(S_1 \to S_2)\  = f \cdot \ \vec{f}_n(S_1 \to S_2)\ $ $\vec{V}(M \in S_2 / S_1) = \vec{0} \implies \ \vec{f}_t(S_1 \to S_2)\  \leq f \cdot \ \vec{f}_n(S_1 \to S_2)\ $			
Torseur statique des liaisons normalisées	$\left\{ \mathcal{T}(S_1 \to S_2) \right\} = \begin{cases} \vec{R}(S_1 \to S_2) \\ \vec{M}_A(S_1 \to S_2) \end{cases}_A = \begin{cases} \vec{X}.\vec{x} + \vec{Y}.\vec{y} + \vec{Z}.\vec{z} \\ L.\vec{x} + M.\vec{y} + N.\vec{z} \end{cases}_A = \begin{cases} \vec{X} & L \\ Y & M \\ Z & N \end{cases}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$			
	$\overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathrm{B}}(S_1 \to S_2) = \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathrm{A}}(S_1 \to S_2) + \overrightarrow{\mathbf{B}} \overrightarrow{\mathbf{A}} \wedge \overrightarrow{R}(S_1 \to S_2)$			
Principe fondamental de la statique :PFS	$\{\tau(\overline{E} \to E)\} = \{\vec{0}\} \implies \text{TRS} : \vec{R}(\overline{E} \to E) = \vec{0} \text{ et TMS} : \vec{M}_A(\overline{E} \to E) = \vec{0}$			
Conséquences du PFS	<ul> <li>Solide soumis à l'action de 2 forces → ces deux 2 sont directement opposées.</li> <li>Si un solide est en équilibre sous l'action de trois forces. Ces forces sont : coplanaires, concourantes en un même point (triangle des forces) ou parallèles.</li> </ul>			
Liaisons en parallèles :		Liaisons en série :		
$\left\{ \mathbf{T}_{eq} \left( S1 \rightarrow S2 \right) \right\} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \mathbf{T} \left( S1 \xrightarrow{Li} S2 \right) \right\}$		$\left\{ T_{eq}(S_0 \rightarrow S_n) \right\} = \left\{ T(S_i \xrightarrow{Li} S_{i+1}) \right\}, \forall i$		

2/6

Prof: A. ELFARH

# III. Systèmes de transmission de mouvement

#### Système vis-écrou : Liaison hélicoïdale

Hélice à droite 
$$\vec{V}(M \in S_2 / S_1) = \pm \frac{pas}{2\pi} . \vec{\Omega}(S_2 / S_1)$$
Hélice à gauche

**<u>NB</u>**: En statique c'est l'inverse :  $\vec{x}.\vec{M}_A(S_1 \to S_2) = \mp \frac{pas}{2\pi} \vec{x}.\vec{R}(S_1 \to S_2)$ (  $L(S_1/S_2) = \text{hélicoïdale d'axe } (A, \vec{x})$  )

#### Réducteur

Pour un réducteur et en régime permanent:

La puissance du moteur=La puissance du sortie du réducteur.

$$C_m w_m = C_{sr} w_{sr}$$

$$\Rightarrow \frac{w_{sr}}{w_m} = \frac{C_m}{C_{sr}}$$

$$w_{sr} < w_m$$
 et  $C_m < C_{sr}$ 

de la vitesse de rotation et l'augmentation du couple.

#### **Engrenages**

1. <u>Engrenage simple</u> (axes parallèles)

Contact extérieur :  $r = \frac{w_2}{w_1} = -\frac{d_1}{d_2} = -\frac{z_1}{z_2}$ ; Contact intérieur :  $r = \frac{w_2}{w_1} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{z_1}{z_2}$ 

2. Engrenage conique

 $r = \frac{w_2}{w_1} = \pm \frac{d_1}{d_2}$ ; le signe dépend du sens du repère utilisé.

3. Train d'engrenages simples

 $r = \frac{w_s}{w_e} = (-1)^n \cdot \frac{\text{Produit des nombres de dents des roues menantes}}{\text{Produit des nombres de dents des roues menées}}$ 

n : nombre de contacts extérieurs.

4. <u>Trains épicycloïdaux</u>

Relation de Willis:

$$\frac{w_{plan\acute{e}taire(S)} - w_{PS}}{w_{Plan\acute{e}taire(E)} - w_{PS}} = (-1)^n. \frac{\text{Produit des nombres de dents des roues menantes}}{\text{Produit des nombres de dents des roues menées}}$$

**Poulies courroie et pignons chaines**:  $r = \frac{w_2}{w_1} = \frac{d_1}{d_2}$ 

# IV. Cinétique

#### 1. Centre d'inertie

- Centre d'inertie d'un solide S de masse m :  $\int_{p \in S} \overrightarrow{GP} \cdot dm = \overrightarrow{0}$   $\Rightarrow$   $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_{p \in S} \overrightarrow{OP} \cdot dm$ .
- Centre d'inertie d'un ensemble matériel :  $\left(\sum_{i=1}^n m_i\right).\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OG_i}$ .
- **Théorèmes de Guldin** (solides de révolution) :  $1^{\text{er}}$  théorème :  $S = L.2\pi r_G$  ;  $2^{\text{er}}$  théorème :  $V = S.2\pi r_G$

#### 2. Matrice d'inertie

$$\begin{bmatrix} I_O(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} : \text{Matrice d'inertie du solide (S) au point O dans la base} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}).$$

#### 3. Influence des symétries sur la forme de la matrice d'inertie

- un plan de symétrie permet d'annuler deux produits d'inertie.

$$(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow D=0$$
 et E=0;  $(\vec{x}, \vec{z}) \rightarrow D=0$  et F=0;  $(\vec{y}, \vec{z}) \rightarrow E=0$  et F=0

- Deux plans de symétrie permettent d'annuler tous les produits d'inertie.
- Axe de révolution permet d'annuler tous les produits d'inertie et les deux moments d'inertie par rapport aux axes perpendiculaire à l'axe de révolution sont égaux.

La matrice reste la même dans toute base admettant l'axe de révolution comme troisième axe.

$$\underline{\text{Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe}} \, \Delta \left( \mathbf{O}, \vec{\delta} \right) : I_{\Delta}(S) = \vec{\mathcal{S}}. \left( \left\lceil \overline{\overline{I}}_{O}(S) \right\rceil . \vec{\mathcal{S}} \right)$$

#### 4. Théorème de Huygens

Un solide(S) (masse m, centre de gravité G et A un point quelconque), avec  $\overrightarrow{AG} = x_G \vec{x} + y_G \vec{y} + z_G \vec{z}$ .

$$[I_A(S)] = [I_G(S)] + [I_A(G(m))]$$

Avec  $[I_O(G(m))]$ : matrice d'inertie au point A du point matériel G de masse m(S).

$$\begin{bmatrix} I_A(G(m)) \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} y_G^2 + z_G^2 & -x_G y_G & -z_G x_G \\ -x_G y_G & z_G^2 + x_G^2 & -y_G z_G \\ -z_G x_G & -y_G z_G & x_G^2 + y_G^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A_A = A_G + m(y_G^2 + z_G^2) \\ B_A = B_G + m(z_G^2 + x_G^2) \\ C_A = C_G + m(x_G^2 + y_G^2) \end{cases}; \begin{cases} D_A = D_G + m y_G z_G \\ E_A = E_G + m z_G x_G \\ F_A = F_G + m x_G y_G \end{cases}$$

$$\left\{C(E/R)\right\} = \left\{ \int_{p \in E} \overrightarrow{V}(P/R)dm \atop \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}(P/R)dm \right\}_{A} = \left\{ \overrightarrow{mV}(G/R) \atop \overrightarrow{\sigma}_{A}(E/R) \right\}_{A}$$

Moment cinétique :  $\vec{\sigma}_A(S/R) = \left[\overline{\overline{I}}_A(S)\right] \cdot \vec{\Omega}(S/R) + m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A \in S/R)$ 

(NB : vérifier si A  $\epsilon$  matériellement à S, si non il faut faire un changement de point )

• Relation de changement de point :  $\vec{\sigma}_{B(E/R)} = \vec{\sigma}_{A(E/R)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{mV}_{(G \in S/R)}$ 

$$\left\{D_{(E/R)}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \int\limits_{p \in E} \vec{\Gamma}(P/R)dm \\ \int\limits_{p \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R)dm \end{array}\right\}_{A} = \left\{\begin{array}{c} m\vec{\Gamma}(G/R) \\ \vec{\delta}_{A}(E/R) \end{array}\right\}_{A}$$

Relation de changement de point du moment dynamique :  $\vec{\delta}_{R}(E/R) = \vec{\delta}_{A}(E/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{m\Gamma}(G/R)$ 

#### 7. Relation entre le moment cinétique et le moment dynamique :

$$\vec{\delta}_{A}(E/R) = \left[\frac{d(\vec{\sigma}_{A}(E/R))}{dt}\right]_{R} + \vec{V}(A/R) \wedge m\vec{V}(G/R) ; \text{ avec } \vec{V}_{A/R} = \left[\frac{d(\vec{OA})}{dt}\right]_{R}.$$

#### 8. Energie cinétique d'un solide indéformable

$$T(S/R) = \frac{1}{2} \left\{ C(S/R) \right\} \otimes \left\{ \mathcal{G}(S/R) \right\} \Rightarrow T(S/R) = \frac{1}{2} \left\{ m\vec{V}(G/R) \right\} \otimes \left\{ \vec{\Omega}(S/R) \right\} \\ \vec{\nabla}(A \in S/R) \right\}$$

$$T(S/R) = \frac{1}{2}\vec{\sigma}_{A}(S/R).\vec{\Omega}(S/R) + \frac{1}{2}m\vec{V}(G/R).\vec{V}(A \in S/R)$$

Au point G: 
$$T(S/R) = \frac{1}{2}\vec{\sigma}_G(S/R).\vec{\Omega}(S/R) + \frac{1}{2}m\vec{V}(G/R)^2$$

Solide en rotation autour d'un axe fixe  $(\Delta)$ :  $T(S/R) = \frac{1}{2}J_{\Delta}w_{\Delta}^2$ ; Solide en translation :  $T(S/R) = \frac{1}{2}m\vec{V}(G/R)^2$ 

#### Eléments cinétiques d'un ensemble de solides :

 $T(E/R) = \sum_{i=1}^{n} T(S_i/R)$ Soit (E) un système de n solides  $(S_i)$  en mouvement par rapport au repère R :

$$\left\{ \mathbb{C}(E/R) \right\} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \mathbb{C}(S_{i}/R) \right\} = \begin{cases} m_{E} \vec{V}(G_{E}/R) = \sum_{i=1}^{n} m_{i} \vec{V}(G_{i}/R) \\ \vec{\sigma}_{A}(E/R) = \sum_{i=1}^{n} \vec{\sigma}_{A}(S_{i}/R) \end{cases} ; \qquad \left\{ D(E/R) \right\} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ D(S_{i}/R) \right\} = \begin{cases} m_{E} \vec{\Gamma}(G_{E}/R) = \sum_{i=1}^{n} m_{i} \vec{\Gamma}(G_{i}/R) \\ \vec{\delta}_{A}(E/R) = \sum_{i=1}^{n} \vec{\delta}_{A}(S_{i}/R) \end{cases} ;$$

10. Moment d'inertie équivalent ramené à un axe  $\Delta$ :  $I_{\acute{e}q\Delta}$  On calcul l'énergie cinétique de l'ensemble des solides $(\Sigma)$ , puis par identification on détermine  $I_{\acute{e}q\Delta}$ :

$$T(\Sigma/Rg) = \sum_{1}^{n} T(S_i/Rg) = \frac{1}{2} I_{\acute{e}q\Delta} w_{\Delta}^{2}.$$

## V. Dynamique des solides

#### 1. Principe fondamental de la dynamique (PFD)

$$\left\{D(\Sigma/Rg)\right\} = \left\{T(\overline{\Sigma} \to \Sigma)\right\} \Rightarrow \left\{m_{\Sigma}.\overline{\Gamma}(G_{\Sigma}/Rg)\right\}_{A} = \left\{\vec{R}(\overline{\Sigma} \to \Sigma)\right\}_{A}$$

Théorèmes généraux de la dynamique

- •• Théorème de la résultante dynamique (TRD) :  $R(\overline{\Sigma} \to \Sigma) = m_{\Sigma}.\vec{\Gamma}(G_{\Sigma}/Rg)$
- $\vec{M}_{\Lambda}(\overline{\Sigma} \to \Sigma) = \vec{\delta}_{\Lambda}(\Sigma/Rg)$ • Théorème du moment dynamique (TMD) :

#### 2. Equations différentielles du mouvement

Une équation de mouvement est une équation différentielle du second ordre traduisant les théorèmes généraux, dans laquelle ne figure aucune composante inconnue des actions mécaniques.

- Chaîne ouverte : nombre d'équations différentielles de mouvement = nombre de mouvements motorisés dans les liaisons= nombre d'isolements;

La frontière d'isolement doit être en intersection avec une seule liaison (translation : TRD, rotation : TMD).

- Chaîne fermée :
- 1- L'application des TG dépend du mouvement des pièces du système étudié (- rechercher et traiter les ensembles soumis à 2 forces et de masses ou inerties négligeables afin de réduire le paramétrage ;
- isoler solide après solide en partant de l'entrée jusqu'à l'action souhaitée.
- Pour les isolements en intersection avec le bâti, il faut appliquer le théorème permettant d'éviter la présence des inconnues de liaisons dans les équations).
- 2- Le TEC s'applique sur l'ensemble en mouvement pour les systèmes ayant un seul degré de liberté (un seul actionneur).

#### 3. Equilibrage statique et dynamique des corps tournants

- -Un solide est statiquement équilibré si le centre d'inertie G est sur l'axe de rotation.
- -Un solide est dynamiquement équilibré lorsque son axe de rotation est un axe principal d'inertie.

# VI. Puissance et énergie

#### 1. Puissance des efforts extérieurs

Cas du solide indéformable :

thu solide indéformable : 
$$P(\overline{S} \to S/R) = \{\tau(\overline{S} \to S)\} \otimes \{g(S/R)\}$$

$$P(\overline{S} \to S/R) = \begin{cases} \vec{R}(\overline{S} \to S) \\ \vec{M}_A(\overline{S} \to S) \end{cases}_A \otimes \begin{cases} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A \in S/R) \end{cases} = \vec{R}(\overline{S} \to S).\vec{V}(A \in S/R) + \vec{M}_A(\overline{S} \to S).\vec{\Omega}(S/R)$$

Puissance du champ des forces de la pesanteur :  $P(Pesanteur \rightarrow S_i / R) = m_i \vec{g} \cdot \vec{V} (G_i / R)$ 

#### 2. Puissance des inter-efforts entre deux solides

$$P_{\text{int}}(S_i; S_j) = P(S_i \leftrightarrow S_j) = \left\{ \tau(S_i \to S_j) \right\} \otimes \left\{ V(S_j / S_i) \right\}$$

Si la liaison entre deux solides  $S_i$  et  $S_j$  est **parfaite** (contact sans frottement), alors  $P(S_i \leftrightarrow S_j) = 0$ .

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = \begin{cases} \vec{R}(S_1 \to S_2) \\ \vec{M}_A(S_1 \to S_2) \end{cases}_A \otimes \begin{cases} \vec{\Omega}(S_2 / S_1) \\ \vec{V}(A \in S_2 / S_1) \end{cases}$$

$$P(\overline{S} \to S/R) = \vec{R}(S_1 \to S_2) \cdot \vec{V}(A \in S_2/S_1) + \vec{M}_A(S_1 \to S_2) \cdot \vec{\Omega}(S_2/S_1)$$

Pratiquement pour un moteur  $P(S_1 \xleftarrow{Mot} S_2) = \vec{C}_{1 \to 2} \cdot \vec{\Omega}(2/1)$  et pour un vérin  $P(S_1 \xleftarrow{Mot} S_2) = \vec{F}_{1 \to 2} \cdot \vec{V}_{2/1}$ 

Cas d'un ressort de traction - compression, la puissance développée est :  $P(S_1 \leftarrow r \rightarrow S_2) = -k(l-l_0) \frac{dl}{dt}$ 

Cas d'un ressort de torsion, la puissance développée est :

$$P(S_1 \stackrel{r}{\longleftrightarrow} S_2) = -C(\theta - \theta_0) \frac{d\theta}{dt}$$
.

\$Pour toute liaison **non parfaite**, la puissance des inter-efforts est négative (puissance dissipée):

Type de	Puissance dissipée par frottement : $P(S_1 \leftrightarrow S_2) < 0$			
Frottement	Translation	Rotation		
sec	$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = -f.N.v_g$	$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = -\mu.N.\dot{\theta}_R$	$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = -\eta.N.\dot{\theta}_P$	
	f: facteur de frottement	$\mu$ : paramètre de	$\mu$ : paramètre de	
	j : facteur de frottement	résistance au roulement	résistance au pivotement	
visqueux	$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = -f.v_g^2$	$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = -\mu \dot{\theta}^2$		
	f: coef de frottement visqueux	$\mu$ : coefficient de frottement visqueux rotatif		

#### 3. Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

Cas d'un solide (S)

$$\frac{d}{dt}T(S/R_g) = P(\overline{S} \to S/R_g) \qquad \frac{d}{dt}T(E/R_g) = P(\overline{E} \to E/R_g) + P_{\text{int}}(E)$$

On utilise fréquemment le théorème de l'énergie cinétique pour déterminer la loi entrée-sortie d'un système à une seule mobilité (mécanismes en chaînes fermées).